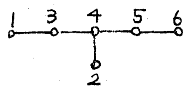
数理解析研究所講究録
200 巻 1974 年 81-84

(E_6)型単連結有限Chevalley群の共役類について

東大 理　　水野 賢三

G, $\bar{G}$をそれぞれ標数pの有限体F_qとその代数閉包K上の(E_6)型単連結Chevalley群, $\bar{H}, \bar{U}, W$, Σ(ルート系), Π(基底) 等記号については〔1〕に準ずるものとする。特に, $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$を図形が  となる様に定める。H, Uを$\bar{H}, \bar{U}$に対応するGの部分群とする。ここでは共役類を決定する方法について述べることは止め結果のみを記す。

p'-元については次の結果がある。

定理(〔2〕)　Gのp'元の共役類と$(\bar{H}/W)_\sigma$ (σは$\bar{G}$のFrobenius同型) の元とは1対1に対応し. $\Gamma(w,S)=\{h\in\bar{H} \mid w(h)=\sigma(h),\ Z_W(h)=W_S\}$ ($S \subsetneq \Pi\cup\{$最低ルート$\}$, $w\in W$ s.t. $w(S)=S$) の元に対応するGの共役類の元hに対し.

$$Z_G(h)\cong \bar{H}(w)\langle \bar{\mathfrak{X}}_{\pm S}\rangle_{\sigma^{-1}w}$$

となる。ここで $\bar{H}(w)=\{m\in\bar{H} \mid w(m)=\sigma(m)\}$とする。

この定理に従って各$\Gamma(w,S)$に対応する共役類の数を決定したが, 常に$\Gamma(w_{1234}w_{2456}w_{3456}w_{12344556}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2,$ 最低ルート$\})=\phi$ であ

った。

p 元の代表系とその中心化群の位数は次の通りである。

$\chi_1(1)$	$(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)q^{36}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)\chi_{1234456}(1)\chi_{8-\alpha_2}(\tau)$	
$\chi_1(1)\chi_3(1)$	$2(q^3-1)^2(q^2-1)^2q^{26}$	(但し $(3,q-1)=1$)	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_8(\zeta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{-8}(\lambda)\chi_2(1)$,	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_{245}(1)\chi_{23445}(\eta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)$	$(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{33}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)$	$(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)(q-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_2(1)\chi_6(1)$	$(q-1)q^{15}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)^2q^{31}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{15}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)$	$(2,p)(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_{345}(\eta)$	$2(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{134}(1)$	$(q-1)q^{13}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{25}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_8(\zeta)$	$2(3,q-1)q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(2,p)(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_8(\lambda\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{245}(\eta)$	$2(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_8(\lambda^2\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_{245}(1)$	$6(q-1)^2q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\eta)$,	$2(q-1,3)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_{-8}(\zeta)$	$2(q^2-1)q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda\eta)$,	$6q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{1345}(1)\chi_{1233445}(\eta)$,	$2(q^2-1)q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda^2)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda^2\eta)$,	$6q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(1)x_{345}(1)$ $\quad 2(3,q-1)q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda)x_{345}(1)$ $\quad 6q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda^2)x_{345}(1)$ $\quad 6q^{12}$

$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(1)$ $\quad (3,q-1)q^8$

$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda)$ $\quad 3q^8$

$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda^2)$ $\quad 3q^8$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)$ $\quad (2,p)(3,p)(3,q-1)q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{2345}(\tau)$

（但し $p=3$） $\quad 3q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{2345}(-\tau)$

（但し $p=3$） $\quad 3q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 2(3,q-1)q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda)x_6(1)$ $\quad 3(2,p)q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda^2)x_6(1)$ $\quad 3(2,p)q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda)x_6(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 6q^6$

$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda^2)x_6(1)x_{234}(\eta)$ $\quad 6q^6$

記号について

$x_{i_1\cdots i_k}(t)=x_{\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}}(t)$ ， δ：最高ルート

η：F_q^* $(p=2)$ の元で $X^2+X+\eta$ が F_q 上既約多項式となる元の1つ。

τ：F_q^* の元で $X^3-X+\tau$ が F_q 上の既約多項式となる元の1つ

λ：F_q^* の非立方元の1つ。（特に $(3,q-1)=3$）

ζ：F_q^* の非平方元の1つ。（特に $p\neq 2$）

p 元の中心化群の構造も比較的容易に得られる。G に於ては、p-元の共役類の個数は標数と無関係に一定であり 20 個である。F_4 型については、$p=2$ の時が 19 個、$p\neq 2$ の時は 15 個、G_2 型については $p=3$ の時が 5 個、$p\neq 3$ の時には 4 個であるこ

とにより、一般に、代数閉体上のChevalley群のunipotent classの数は、標数がルートの長さの2乗の比と異なる時には一定で体の取り方に寄らない様に思われる。（[3], [4], [5], [6]）

参照

1. R. Steinberg : *Lecture on Chevalley groups.* Yale Univ (1967)
2. 〃 : *Endomorphisms of Linear Algebraic Groups.* Menoir 80. A.M.S. (1968)
3. B. Chang : *The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2).* J. Alg 9 (1968)
4. H. Enomoto : *The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of char 2 or 3.* J.F.S. Univ of Tokyo. (1970)
5. K. Shinoda : *The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char 2.* (to appear)
6. T. Schoji : *The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char $\neq 2$.* (to appear)